Exercice n° 1

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$

Donc f est. dérivable en 2 et $f'(2)=5$

b) $T: y=f'(2)(x-2)+f(2)$

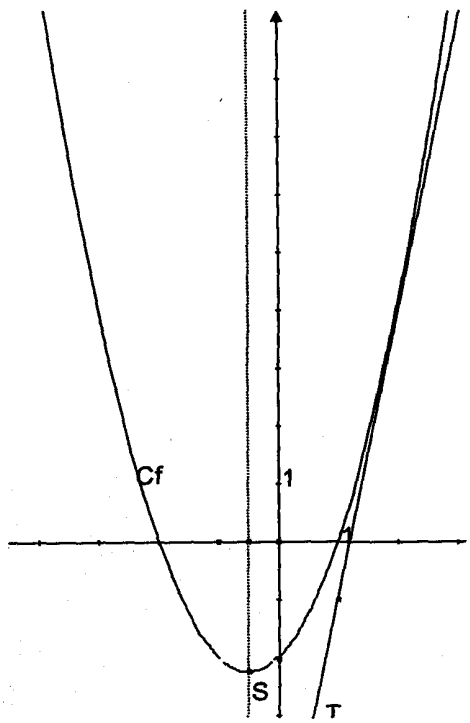
$=5(x-2)+4$

$\boxed{T: y=5x-6}$

c) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{1-2-8}{4}=\dfrac{-9}{4}$

C_f est une parabole de sommet le point $S(-\frac{1}{2};-\frac{9}{4})$ et

D'axe de symétrie la droite d'équation : x = -1/2



d) Approximation affine de f en 2

$f(2+h)\simeq f(2)+hf'(2)\simeq 4+5h$

(h Voisin de 0)

Exercice n° 2

● $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1}=-5=f'(-1).$

⊙ $T: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$=-5(x+1)+4$

$\boxed{y=-5x-1}$

⊙ Approximation affine en a=-1

h Voisin de 0 :

$f(-1+h)\simeq f(-1)+hf'(-1)\simeq 4-5h.$

● ⊙ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{2x-3}{x+4}+\frac{1}{5}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{10x-15+x+4}{5(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{11x-11}{5(x+4)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{11(x-1)}{5(x+4)(x-1)}=\dfrac{11}{25}$

Donc $f'(1)=\dfrac{11}{25}$.

⊙ Tangente:

$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=\dfrac{11}{25}(x-1)-\dfrac{1}{5}$

$\boxed{y=\dfrac{11}{25}x-\dfrac{16}{25}}$

⊙ Approximation affine en $a=1$

$f(1+h)\simeq f(1)+hf'(1)\simeq -\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{25}h$

(h Voisin de 0)

● ⊙ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-4}-2}{x-1}\times\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-4-4}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+5x-8}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{3(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right)}^{a+b+c=0}}{(x-1)\left[\sqrt{3x^2+5x-4}+2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2+5x-4}+2} = \frac{11}{4}.$$

Donc f est dérivable en $x_0=1$ et $f'(1)=\frac{11}{4}$

⊙ Tangente:

$T: y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$= \frac{11}{4}x - \frac{11}{4} + 2$ $\quad \boxed{y = \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}}$

⊙ Approximation affine de f en 1 :

$f(1+h) \approx f(1) + hf'(1) \approx 2 + \frac{11}{4}h$ (h Voisin de 0)

Exercice n° 3

● $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1 = f_d'(0)$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x}$

$= \lim_{x\to 0^-} x - 1 = -1 = f_g'(0)$

On a: $f_d'(0) \neq f_g'(0)$ f n'est pas dérivable en $x_0=0$

la courbe (C_f) admet deux demi - tangentes

au point d'abscisse $x_0=0$ ayant pour équations

$T_1: \begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow T_1: \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}$

:

$T_2: \begin{cases} y = f_g'(0)(x-0)+f(0) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$

● $D_f =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}-0}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\sqrt{x^2-5x+6}}$

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

f Non dérivable à gauche de $x_0=2$

$T: \begin{cases} x=2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Demi tangente verticale dirigé vers le haut.

●

$\begin{cases} f(x) = x^2-2x+4; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}; x > 1 \end{cases}$

• Dérivabilité à droite en 1.

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2+x+1}{x}-3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0 = f_d'(1)$

• Dérivabilité à gauche en $x_0=1$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+4-3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x-1 = 0 = f_g'(1)$

On a: $f_d'(1) = f_g'(1) = 0$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$

Tangente :

$T: y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$T: \boxed{y=3}$

4) • $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 = f_d'(1)$

• $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{x-1} = -1 = f_g'(1)$

$f_d'(1) \neq f_g'(1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0=1$.

La courbe de f possède deux demi tangentes T_1 et T_2

$T_1: \begin{cases} y = f_g'(1)(x-1)+f(1) \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1: \begin{cases} y = -x+1 \\ x \le 1 \end{cases}}$

$T_2: \begin{cases} y = f_d'(x-1)+f(1) \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2: \begin{cases} y = x-1 \\ x \ge 1 \end{cases}}$

Exercice n° 4

$$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & x \ge 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & x < 3 \end{cases}$$

● */ Sur $]3,+\infty[$: $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ est continue sur $]3,+\infty[$ (car $x \mapsto x+1$ continue et positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est continue sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

*/ continuité en $x_0 = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 4\sqrt{x+1} = 8 = f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 - 5x + c = -6 + c$

Donc f est. Continue en $x_0 = 3$ si et seulement si $-6+c = 8 \Rightarrow c = 14$.

D'où pour f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\boxed{c=14}$

●

*/ Sur $]3,+\infty[$: $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty,3[$ (car $x \mapsto x+1$ dérivable et strictement positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est dérivable Sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Dérivabilité en $x_0 = 3$:

$$\bullet \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\left(4\sqrt{x+1}-8\right)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{16(x+1)-64}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{16(x+1-4)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{16(x-3)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)} = 1 = f_g'(1)$$

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-5x+14-8}{x-3}$$

$$\lim_{3^-} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1$$

clusion : $f_g'(3) = f_d'(3) = 1$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $x_0 = 3$ et $f'(3) = 1$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{cases} f'(x) = 2x-5 \text{ pour } x < 3 \\ f'(3) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ pour } x > 3 \end{cases}$$

Exercice n° 5

● $x \mapsto x^2 - 1$ est continue sur IR (Fonction polynôme) donc en particulier elle est continue sur $]-\infty,1]$.

$x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est continue pour $x \ge 0$ en particulier elle est continue sur $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x} - 1 = 0 = f(1)$

D'où f est continue en $x_0 = 1$ et par la suite sur IR

● a) */ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 = f_g'(1)$$

*/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2} = f_d'(1)$$

Conclusion :

$f_g'(1) \ne f_d'(1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

b) Interprétation géométrique :

Au point d'abscisse $x_0 = 1$, C_f admet Deux demi tangentes d'équations :

$T_1 \begin{cases} y = 2x-2 \\ x \le 1 \end{cases}$ $\qquad$ $T_2 \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{cases}$

Exercice n° 6

a) on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R} : -1 \le \cos\alpha \le 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \le \cos \pi x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\cos \pi x$

Pour $x>0$ on aura:

$$0 \le \frac{1-\cos \pi x}{x} \le \frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$3 \le 3+\frac{1-\cos \pi x}{x} \le 3+\frac{2}{x}$$

Donc $\forall x>0 : 3 \le f(x) \le 3+\frac{2}{x}$

b) Appliquant le théorème de comparaison:

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}+3=3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

*/ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} 2x+\sqrt{x^2-1}=-2=f(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x^3-3x^2+3$

$=-2=f(-1)$

f Continue à droite et à gauche en

$x_0=-1$ D'où f est continue en $x_0=-1$.

*/ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=3=f(0)$

$\boxed{\lim\limits_{\alpha\to0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=0}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 3+\frac{1-\cos \pi x}{\pi x}\times\pi$

$=3+0=3=f(0)$

Donc f continue en 0.

Dérivabilité de f a gauche en $x_0=-1$:

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2x+\sqrt{x^2-1}+2}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2x+2}{x+1}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} 2+\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}=2+\frac{-2}{0^+}=-\infty.$

f n'est dérivable a gauche en $x_0=-1$.

C_f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $x_0=-1$.

Dérivabilité a gauche on 0:

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{2x^3-3x^2+3-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^-} 2x^2-3x=0=f_g'(0)$

Dérivabilité à droite en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{3+\frac{1-\cos \pi x}{x}-3}{x}=\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-\cos \pi x}{x^2}=\frac{\pi^2}{2}=f_d'(0)$

Car: $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{2}}$

$f_g'(0)\neq f_d'(0)$: f non dérivable en $x_0=0$.

Exercice n° 7

a/ $\lim\limits_{x\to0} \frac{2\sin x+1-\cos x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0} 2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}=2\neq f(0)=1$

f n'est pas continue en 0.

b/ f n'est pas continue en 0 donc f n'est pas Dérivable en 0

Exercice n° 8

a/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos x$.

b/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\sin x$.

c/ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x>0\\ -1 & si\ x<0\end{cases}$

d/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2-10x+7$

e/ f est dérivable pour tout x vérifiant : $x^2+x-2\neq0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ et

$f'(x)=\frac{2(x^2+x-2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$=\frac{2x^2+2x-4-(4x^2+4x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}.$

g/ f est dérivable pour $4x-1>0$

Donc f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4},+\infty\right[$

et $f'(x)=\frac{(4x-1)'}{2\sqrt{4x-1}}=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}$

h/ f est dérivable pour $1-\cos x \neq 0$

Donc pour $\cos x \neq 1$ d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ et on a:

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(1-\cos x)-\sin x\,(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x-1}.$$

Exercice n° 9

● $D_f=\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x.x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

et $f'(x)=4\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)'\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$

$$=4\left(\frac{-5}{(2x+1)}\right)\left(\frac{3+x}{2x+1}\right)^3$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-20(x+3)^3}{(2x+1)^4}}$$

● On a: $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ pour: $x\in\,]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[=J$

D'où f est définie sur J.

f est dérivable pour tout x tel que : $\frac{x+1}{x-1}>0$

Donc est dérivable sur $J\setminus\{-1\}$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}=\boxed{\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}}$$

● f est définie et dérivable pour $2\cos x-1\neq 0$

Or on a : $2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

D'où : f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

et on a :

$$f'(x)=\frac{\cos x.(2\cos x-1)+2\sin x.(\sin x-1)}{(2\cos x-1)^2}$$
$$=\frac{2\cos^2 x-\cos x+2\sin^2-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\cos x-2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$$

● f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

● f est définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

et elle est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

et on a : $f'(x)=(\sqrt{x^2-1})'.(-\sin\left(\sqrt{x^2-1}\right))$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.\sin\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

● On a pour $x\neq 0$: $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$

$$\Leftrightarrow -x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\overset{\text{pour } x>0}{\Leftrightarrow} -x\leq\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

$$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$

$$\overset{\text{pour } x<0}{\Leftrightarrow} x\leq\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\leq -x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

D'où f est dérivable a gauche en 0 et $f_g'(0)=0$

et par suite est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=2x.\sin\frac{1}{x}+x^2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad pour\ x\neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad pour\ x\neq 0 \\ f'(0)=0 \end{array}}$$

Exercice n° 10

● $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	-1	↗ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

● f admet un minimum globale -1 pour la valeur 0.

● $f(]-\infty,0])=[-1,1[$

$f([0,+\infty[)=[-1,1[$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{-1\le f(x)\le 1}$ donc f est bornée

Exercice n° 11

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) $x\mapsto 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$1+\sqrt{x}\neq 0;\forall x>0$ D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},\forall x>0$$

b) $f'(x)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t}{1+t}=-1$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	1 ↘	-1

Exercice n° 12

$f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

● L'équation $f(x)=x$ est équivalente à $f(x)-x=0$

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a: $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x$ est continue sur $]1,+\infty[$

Et on a : $g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0$

g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur

$$\left]\lim_{x\to+\infty} g,\lim_{x\to 1^+} g\right[=\ ]-\infty,1[=J$$

Comme $0\in J$ l'équation $g(x)=0$ Par suite $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1,+\infty[$.

● $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\sqrt{x}\neq 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

et pour tout réel $x\in]1,+\infty[$.

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Or $x>1\Rightarrow x\sqrt{x}\ge 1$

$$\Rightarrow\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{1}{2},\forall x>1.$$

● f est continue sur $]1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$

et $\forall t\ge 1:|f'(t)|\le\dfrac{1}{2}$

$x>1;\alpha>1$ D'après l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$

Comme $f(\alpha)=\alpha$ on aura : $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

Exercice n° 13

Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

● f est définie lorsque $\dfrac{x}{x-1}\geq 0$ *et* $x-1\neq 0$

$\Rightarrow D_f=]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

● f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)'}{2\times\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}=\frac{\dfrac{-1}{(x-1)^2}}{2\times\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}<0;\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

Tableau des variations:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	‖	$-$
$f(x)$	1 ↘	0	‖	$+\infty$ ↘ 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{1}=1\ ;\ \lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

● **erreur** : $g(x)=f(\sin x)$, $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$x\mapsto\sin x$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

Or f n'est pas définie sur $]0,1]$

Donc g n'est pas définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (impossible).

Exercice n° 14

$f(x)=\cos^2 x, x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

● a) $x\mapsto\cos x$ est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos^2 x$ est Dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f'(x)=2(-\sin x)\cos x=-2(\sin x).\cos x$

$\boxed{f'(x)=-2\cos x.\sin x=-\sin 2x}, x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) On a: $\cos x>0$ et $\sin x>0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc

$\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[: f'(x)<0$

T.V:

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

● a) $g'(x)=f'(x)-1<0$

g continue et strictement décroissante donc g est une Bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},1\right[$

Comme $0\in\left]-\dfrac{\pi}{2},1\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) */ si $x\leq\alpha\Leftrightarrow g(x)\geq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$

. */ $x\geq\alpha\Leftrightarrow g(x)\leq g(\alpha)\Leftrightarrow g(x)\leq 0$.

(Car g est décroissante)

c) $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}<0$

$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\pi}{6}>0$

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right).g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ Donc $\boxed{\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{6}}$.

d) Position de C_f et Δ :

x	0	α	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
position	(C) au Dessus de D		(C) au dessous de D

(C) coupe D

Exercice n° 15

● $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}2-\sqrt{x^2-x}=2=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=2=f(0)$

f Continue a gauche et à droite

Donc f est continue en $x_0 = 0$.

● / $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-\sqrt{x^2-x}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(x^2-x)}{x\times\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow f$ non dérivable à gauche en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse 0

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1-(1+x^2))}{x\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

Conclusion: f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique : (C_f) admet une demi- tangente horizontale à droite au point d'abscisse 0

● Pour $x\in]0,+\infty[$ $f(x) = 1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) = -\dfrac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \dfrac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x) < 0$ *pour* $x > 0$

● Pour $x < 0$: $f(x) = 2-\sqrt{x^2-x}$

$f'(x) = 0-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x^2-x}}$

$f'(x) > 0$ *pour* $x < 0$

T.V:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\searrow 0} = 1$

● Les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses ont pour abscisses les solutions de $f(x) = 0$.

•pour $x < 0$:

$2-\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} = 2$

$\Leftrightarrow x^2-x = 4 \Leftrightarrow x^2-x-4 = 0$

$\Delta = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x' = \dfrac{1+5}{2}$ ou $x'' = \dfrac{1-5}{2} = -2$

$x' = 3 > 0$ (à Rejeté) ou $\boxed{x'' = -2}$

• Pour $x > 0$:

$1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -1$. Impossible

Donc $(C_f)\cap(xx') = \{A(-2,0)\}$

●a) $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x)-x = 0$

Sur $]0,+\infty[$:

$g'(x) = f'(x)-1 < 0$ car $f'(x) < 0$

D'où g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et $g(]0,+\infty[) =]-\infty,2[$.

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 1-\infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)-x = 2-0 = 2$)

Comme $0\in]-\infty,2[$ l'équation $g(x) = 0$

et par suite $f(x) = x$ admet dans $]0,+\infty[$

une unique solution α

b) $g(1,5) = f(1,5)-1,5 \simeq 0,05$

$g(1,6) = f(1,6)-1,6 \simeq -0,07$

$g(1,5)\times g(1,6) < 0 \Rightarrow 1,5 < \alpha < 1,6$

● */on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow y = 1$

est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\sqrt{x^2-x}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\left(-\frac{2}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{x}$ ($\frac{2}{x}\searrow 0$, $\frac{1}{x}\searrow 1$) $= 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} 2-\sqrt{x^2-x}-x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2-\left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} 2-\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x}$$

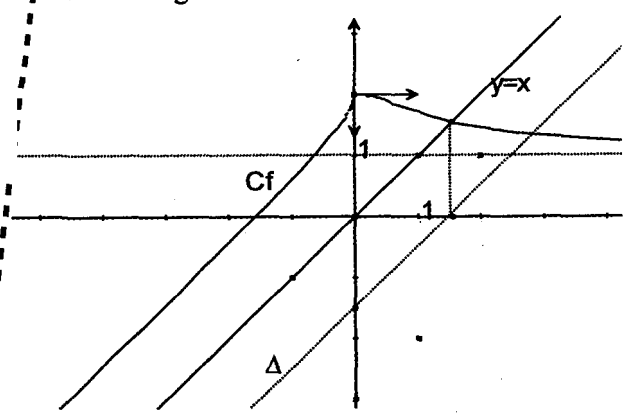
$$= \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{x}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Conclusion.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x)-x=-\frac{3}{2}$$

Donc: $\Delta: y=x-\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de $-\infty$.



8) a) $h(x)=f(\text{t}gx)$

On a: $tg\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[: tgx\in[0,+\infty[$

$h'(x)=(tgx)'f'(tgx)$ (fonction composée)

$$=\cancel{\left(1+tg^2x\right)}\frac{-tgx}{\cancel{\left(1+tg^2x\right)}\left(\sqrt{1+tg^2x}\right)}$$

$$\boxed{h'(x)=\frac{-tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

b) $h(x)=f(tgx)=1+\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$

Or. $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$, d'où $\sqrt{1+tg^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$$=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x} \quad (\text{car } \cos x>0 \text{ sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right[)$$

Donc $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=1+\frac{1}{\frac{1}{\cos x}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{h(x)=1+\cos x}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice n° 16

$$g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1$$

a) $x\mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x\mapsto x^2+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $x^2+3>0$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+3}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$$

$$g'(x)=\frac{2\left(x^2+3\right)-2x^2}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\frac{6}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{6}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}}$$

b) $g'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

T.V:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	-3	↗	0	↗	1

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}-1 \underset{|x|=-x}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=-3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1$$

$$\underset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=1$$

c) $g(1)=\frac{2}{\sqrt{4}}-1=1-1=0$

Si $x\geq 1$ alors $g(x)\geq g(1)=0$

Si $x \le 1$ alors $g(x) \le g(1) = 0$

x	-∞		1		+∞
g(x)		-	0	+	

● $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$

a) $x^2+3>0$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 = \frac{2x}{\sqrt{3+x^2}} - 1 = g(x)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

T.V:

x	−∞		1		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	3	↗	+∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2\sqrt{3+x^2} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \underbrace{\left(2\sqrt{\frac{3}{x^2}+1} - 1 \right)}_{1} = +\infty$$

b) $T : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$= -2(x+1)+5 \Rightarrow \boxed{y = -2x+3}$

Exercice n° 17

$$f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$$

1) a) signe de x^2+x

x	+∞		−1		0		+∞
x^2+x		+	0	−	0	+	

*/ Dérivabilité à gauche en 0

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-(x^2+x)+1}{-x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2-x+1+x-1}{x(-x+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{-x+1} = 0 = f_g'(0)$$

*/ Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2+x+1}{x+1} - 1}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+x+1-x-1}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 = f_d'(0)$$

Conclusion:

$f_g'(0) = f_d'(0)$ Donc f est dérivable en 0

et $f'(0) = 0$.

*/ Dérivabilité à gauche en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1} - \frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2(x^2+x+1)+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x^2+3x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x+1}{2(-x+1)} = -\frac{1}{4} = f_g'(-1)$$

*/ Dérivabilité a droite en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x^2-2x+2+x-1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x^2-x+1}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(x+1)(-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{-2x+1}{2(-x+1)} = \frac{3}{4} = f_d'(-1)$$

Conclusion:

$f_g'(-1) \neq f_d'(-1)$ donc f non dérivable en $x_0 = -1$.

b) Au point d'abscisse 0, C_f admet une tangente horizontale. $y = 0$

Au point d'abscisse $x_0 = -1$, C_f admet deux demi -tangentes de coefficients directeurs respectives $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

2) Expression de $f(x)$ sans valeur absolue:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{-x+1}, x\le -1 \\ f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{-x+1}, x\in[-1,0] \\ f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}, x\ge 0 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2}, x\le -1 \\ f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(-x+1)^2}, x\in\,]-1,0[\\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}, x\ge 0 \end{cases}$$

On a:

$-x^2+2x+1=0, \Delta'=2$

$x'=1-\sqrt{2}\notin\,]-\infty,-1[$ et $x''=1+\sqrt{2}\notin\,]-\infty,-1[$

Donc:

x	$+\infty$	x'		x''	$+\infty$
$-x^2+2x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow f'(x)<0$ *sur* $]-\infty;-1[$

On a aussi: $x^2-2x>0$ pour $x\in\,]-1,0[$

et $x^2+2x\ge 0$ pour $x\in[0,+\infty[$.

T.V :

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
		$\frac{1}{2}$			

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}=+\infty$$

Branches infinies:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x+1}-x$$

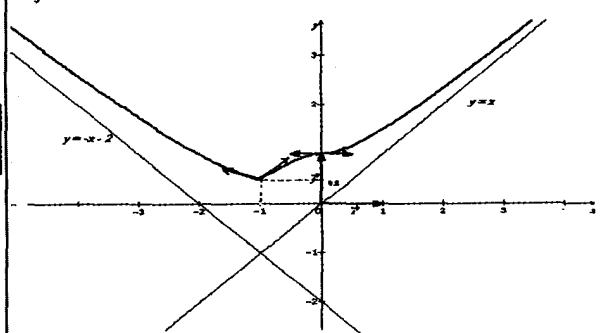
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

Donc $\Delta: y=x$ est une asymptote à C_f au $V_{+\infty}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x(-x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x^2+x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{-x+1}+x$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2+x}{-x+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-x+1}=-2$$

Donc $\Delta': y=-x-2$ est une asymptote oblique a C_f au Voisinage de - ∞.